

p -АДИЧЕСКИЕ КВАЗИМЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ВАННИМЕНУСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

О. Н. ХАКИМОВ

Аннотация. В этой работе мы изучим p -адические квазимеры Гиббса для модели Ваннименуса на дереве Кэли порядка два. Изучена ограниченность для трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса. Также будут исследованы периодические p -адические квазимеры Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, квазимера Гиббса, модель Ваннименуса, трансляционно-инвариантная мера, p -адические числа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание предельных мер Гиббса для данного гамильтониана является одним из основных задач в теории гиббсовских мер. Полный анализ множества таких мер является довольно трудоемким. По этой причине большая часть работ по этой тематике посвящены изучению гиббсовских мер на дереве Кэли [2, 4].

Известно [5, 8, 14], что p -адические модели в физике не могут быть описаны, используя обычную теорию вероятностей. В [5] абстрактная p -адическая теория вероятностей была развита посредством теории неархимедовых мер. Вероятностные процессы на поле p -адических чисел были изучены многими авторами (см. [1, 6, 9–12, 15]). Не архимедовый аналог теоремы Колмогорова был доказан в [3].

В работе [6] были изучены p -адические меры Гиббса для модели Изинга с четырьмя конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. Доказаны, что множество p -адических мер Гиббса состоит из единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса. Более того, эта мера является ограниченной. В работах [9, 10] были изучены трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка два. Показаны, что множество таких мер может состоять более из одного элемента. А в работе [6] также изучены трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса для модели Ваннименуса на дереве Кэли. Было доказано, что если $J < 0$, то существуют шесть трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса.

Настоящую работу можно считать как продолжение работы [6]. В работе будем изучать проблемы ограниченности трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса для модели Ваннименуса. Также будем исследовать периодические p -адические квазимеры Гиббса.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

2.1. p -адические числа и меры. Каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде $x = p^r \frac{n}{m}$, где $r, n \in \mathbb{Z}$, m – положительное число, $(n, m) = 1$, причем m и n не делятся на p и p – фиксированное простое число. p -Адическая норма $|x|_p$ определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Это свойство показывает неархимедовость нормы.

Из этого свойства непосредственно следуют следующие утверждения:

- 1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- 2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$;

Пополнение поля рациональных чисел \mathbb{Q} по p -адической норме приводит к полю p -адических чисел \mathbb{Q}_p для каждого простого p (см. [7]).

Начиная с поля рациональных чисел \mathbb{Q} , мы можем получить либо поле вещественных чисел \mathbb{R} , либо одно из полей p -адических чисел \mathbb{Q}_p (теорема Островского).

Каждое p -адическое число $x \neq 0$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), \quad (2.1)$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j целые числа, $0 \leq x_j \leq p - 1$, $x_0 > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$ (см [7, 13, 14]). В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Теорема 1. [14] Уравнение $x^2 = a$, $0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + \dots)$, $0 \leq a_j \leq p - 1$, $a_0 > 0$ имеет решение $x \in \mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие:

- i) $\gamma(a)$ четное;
- ii) $y^2 = a_0 \pmod{p}$ разрешимо, если $p \neq 2$; $a_1 = a_2 = 0$, если $p = 2$.

Следствие 1. [14] Для того чтобы уравнение $x^2 = -1$ имело решение в \mathbb{Q}_p , необходимо и достаточно, чтобы $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ обозначим

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

p -адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

который сходится для $x \in B(1, 1)$; p -адическая экспонента определяется как

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

которая сходится для $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

Лемма 1. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\exp_p(x)|_p &= 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p, \quad |\log_p(1+x)|_p = |x|_p, \\ \log_p(\exp_p(x)) &= x, \quad \exp_p(\log_p(1+x)) = 1+x. \end{aligned}$$

Более подробно об основах p -адического анализа и p -адической математической физики можно найти в [7, 13, 14].

Пусть (X, \mathcal{B}) измеримое пространство, где \mathcal{B} алгебра подмножеств в X . Функция $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется p -адической мерой, если для любого набора $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ такого, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ имеет место

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

p -Адическая мера называется вероятностной, если $\mu(X) = 1$ (см. [3]).

2.2. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, V — множество вершин и L — множество ребер. Две вершины x и y называются *ближайшими соседями*, если существует ребро $l \in L$ соединяющий их и пишется как $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ — число ребер кратчайшей пути, соединяющей x и y .

Пусть $x^0 \in V$ фиксированная точка. Введем обозначения:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m,$$

и

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

Обычно говорят, что $S(x)$ это множество прямых потомков элемента x . Две вершины y и z называются *следующими ближайшими соседями*, если существует вершина $x \in V$ такая, что $y, z \in S(x)$ и обозначается через $\rangle y, z \langle$.

2.3. Модель Ваннименуса. Мы рассмотрим p -адическую модель Ваннименуса на дереве Кэли порядка два.

Пусть \mathbb{Q}_p поле p -адических чисел и $\Phi = \{-1; 1\}$. Конфигурация σ в V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; аналогично определяются конфигурации σ_n и $\sigma^{(n)}$ на V_n и W_n , соответственно. Множество всех конфигураций на V (соответственно V_n , W_n) обозначается через $\Omega = \Phi^V$ (соответственно $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Для конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_n}$ и $\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}$ определим

$$(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{если } x \in V_{n-1}, \\ \varphi^{(n)}(x), & \text{если } x \in W_n. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)} \in \Omega_{V_n}$.

Гамильтониан $H_n : \Omega_{V_n} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ p -адической модели Ваннименуса имеет следующий вид

$$H_n(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\rangle x, y \langle \\ x, y \in V_n}} \sigma(x)\sigma(y). \quad (2.2)$$

где $J_1, J_2 \in \mathbb{Q}_p$.

Замечание 1. Заметим, что модель Ваннименуса является обобщением модели Изинга. Если в модели Ваннименуса $J_2 = 0$, то получается модель Изинга. Более подробно о модели Ваннименуса можно найти в книге [12].

2.4. Построение p -адической квази меры Гиббса. Следуя работ [9, 10] построим p -адическую меру Гиббса для модели (2.2). Как и в классическом случае, мы рассмотрим специальный класс меры Гиббса.

Пусть $h : x \rightarrow h_x \in \mathbb{Q}_p$ p -адическая функция на V . Рассмотрим p -адическое вероятностное распределение $\mu_h^{(n)}$ на Ω_{V_n} , которое определяется как

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = Z_{n,h}^{-1} p^{H_n(\sigma_n)} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

где $Z_{n,h}$ нормирующая константа

$$Z_{n,h} = \sum_{\varphi \in \Omega_{V_n}} p^{H_n(\varphi)} \prod_{x \in W_n} h_x^{\varphi(x)}. \quad (2.4)$$

Говорят, что p -адическое вероятностное распределение $\mu_h^{(n)}$ согласовано, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$,

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \varphi \in \Omega_{V_n}) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2.5)$$

В этом случае по теореме Колмогорова [3] существует единственная мера μ_h на Ω такая, что $\mu_h(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Определение 1. p -адическая вероятностная мера μ называется p -адической квази-мерой Гиббса, если существует p -адическая функция h от $x \in V$ такая, что

$$\mu(\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n), \quad \text{при всех } \sigma_n \in \Omega_{V_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь $\mu_h^{(n)}$ определена как (2.3), (2.4).

Обозначим через $\mathcal{QG}(H)$ множество всех p -адических квазимер Гиббса, соответствующих функциям $h = \{h_x, x \in V\}$. Рассмотрим гамильтониан (2.2) в случае $J = J_1 = J_2 \in \mathbb{Z}$.

Замечание 2. Заметим, что меры μ_h и μ_{-h} соответствующие функциями h и $-h$ одинаковы.

Утверждение 1. [6] p -адическая вероятностная мера $\mu_h^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условию согласованности (2.5) тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее:

$$u_x = \frac{\theta^2 u_y u_z + u_y + u_z + 1}{u_y u_z + u_y + u_z + \theta^2}, \quad (2.6)$$

здесь $\theta = p^{2J}$, $u_x = h_x^2$ и $S(x) = \{y, z\}$.

Замечание 3. Известно, что вещественнозначные меры Гиббса возникают во многих проблемах теории вероятностей и статистической механики. Эта мера определяется с помощью функции "экспоненты". Аналогично p -адическая мера Гиббса определяется с помощью p -адической "экспоненты" $\exp_p(x)$. Но область определения и область значения функции $\exp_p(x)$ не очень хороша для работы над ними. Поэтому для многих моделей, в частности для модели Изинга существует только одна p -адическая мера Гиббса. Для того, чтобы получить широкий класс p -адических мер Гиббса в работе [9] были введены понятие p -адической квазимеры Гиббса, которая определяется с помощью функции p^x . В работах [9, 10] для модели Поттса и в работе [6] для модели Ваннименуса показаны, что множество $\mathcal{QG}(H)$ шире, чем множество всех p -адических мер Гиббса. Более того, p -адические квазимеры Гиббса могут быть неограниченными (см. [10]).

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНАЯ КВАЗИ МЕРА ГИББСА

Решения уравнения (2.6) вида $u_x = u \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq x_0$ называются трансляционно-инвариантными. Соответствующая p -адическая квазимера Гиббса называется трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Подставляя u вместо u_x для всех $x \neq x_0$, из уравнения (2.6) получим

$$u = \frac{\theta^2 u^2 + 2u + 1}{u^2 + 2u + \theta^2}. \quad (3.1)$$

Легко проверить, что $u_0 = 1$ является решением уравнение (3.1). Так как уравнение (3.1) можно рассмотреть как кубическое уравнение, то для других решений (если они существуют) имеем формальную запись

$$u_{1,2} = \frac{\theta^2 - 3 \pm \sqrt{(1 - \theta^2)(5 - \theta^2)}}{2}. \quad (3.2)$$

Из [6] известны следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть $J > 0$. Тогда верны следующие:

(i) Если $p \in \{2, 3, 5\}$ то существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая квазимера Гиббса μ_{h_0} ;

(ii) Пусть $p > 5$ и x_0 является решением сравнения $x^2 \equiv 5 \pmod{p}$. Если сравнение $x^2 + 6 \equiv 2x_0 \pmod{p}$ разрешимо, то существуют три трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса: μ_{h_0} , μ_{h_1} , μ_{h_2} .

Здесь $h_0 = 1$, $h_1 = \sqrt{u_1}$, $h_2 = \sqrt{u_2}$.

Теорема 3. Пусть $J < 0$. Тогда существуют три трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса μ_{h_0} , μ_{h_1} , μ_{h_2} .

3.1. Ограниченность трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса.

Лемма 2. Пусть h является решением уравнения (2.6) и μ_h соответствующая p -адическая квазимера Гиббса. Тогда для нормирующей константы $Z_{n,h}$ (см. (2.4)) имеет место равенство

$$Z_{n+1,h} = A_{n,h} Z_{n,h}, \quad (3.3)$$

где $A_{n,h}$ определяется по формуле (3.6).

Доказательство. Так как h является решением уравнения (2.6), то для любого $x \in V$ существует константа $a_h(x) \in \mathbb{Q}_p$ такая, что

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} p^{J(\sigma(x)(\varphi(y)+\varphi(z))+\varphi(y)\varphi(z))} h_y^{\varphi(y)} h_z^{\varphi(z)} = a_h(x) h_x^{\sigma(x)}, \quad (3.4)$$

здесь $S(x) = \{y, z\}$ и $\sigma \in \Omega_{V_n}$.

Отсюда

$$\prod_{x \in W_n} \sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} p^{J(\sigma(x)(\varphi(y)+\varphi(z))+\varphi(y)\varphi(z))} h_y^{\varphi(y)} h_z^{\varphi(z)} = \prod_{x \in W_n} a_h(x) h_x^{\sigma(x)} = A_{n,h} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}, \quad (3.5)$$

где

$$A_{n,h} = \prod_{x \in W_n} a_h(x). \quad (3.6)$$

Из (2.3) и (3.5) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} \mu_h^{(n+1)}(\sigma \vee \varphi) &= \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} \frac{1}{Z_{n+1,h}} p^{H(\sigma \vee \varphi)} \prod_{x \in W_{n+1}} h_x^{\varphi(x)} \\ &= \frac{A_{n,h}}{Z_{n+1,h}} \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} p^{H(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)} = \frac{A_{n,h}}{Z_{n+1,h}} Z_{n,h} = 1. \end{aligned}$$

□

Пусть h является решением уравнения (2.6). Для h найдем $a_h(x)$. Фиксируем точку $x \in V$ и перепишем (3.4) для случаев $\sigma(x) = 1$ и $\sigma(x) = -1$. При $\sigma(x) = 1$ и $\sigma(x) = -1$ соответственно имеем

$$p^{3J} h_y h_z + p^{-J} h_y^{-1} h_z + p^{-J} h_y h_z^{-1} + p^{-J} h_y^{-1} h_z^{-1} = a(x) h_x$$

$$p^{-J} h_y h_z + p^{-J} h_y^{-1} h_z + p^{-J} h_y h_z^{-1} + p^{3J} h_y^{-1} h_z^{-1} = a(x) h_x^{-1}.$$

Умножая эти равенства, получим

$$a_h(x) = \frac{((p^{4J} h_y^2 h_z^2 + h_y^2 + h_z^2 + 1)(h_y^2 h_z^2 + h_y^2 + h_z^2 + p^{4J}))^{\frac{1}{2}}}{p^J h_y h_z}. \quad (3.7)$$

Для трансляционно-инвариантных решений h формула (3.7) имеет вид

$$a_h = \frac{((p^{4J} h^4 + 2h^2 + 1)(h^4 + 2h^2 + p^{4J}))^{\frac{1}{2}}}{p^J h^2}. \quad (3.8)$$

3.1.1. *Случай $J > 0$.*

Лемма 3. *Для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ и $n \geq 1$ имеет место*

$$\left| p^{H_n(\sigma)} \right|_p \leq p^{J(2^n-1)}.$$

Доказательство. Легко убедиться, что $H_n(\sigma) \geq -J(2^n - 1)$. Заметим, что Гамильтониан достигает своего минимума. Например, конфигурация $\sigma \in \Omega_{V_n}$ определенная как

$$\sigma(y)\sigma(z) = -1, \text{ при всех } x \in V_{n-1}, S(x) = \{y, z\}$$

дает минимальное значение гамильтониана. \square

Лемма 4. $|h_0|_p = |h_1|_p = |h_2|_p = 1$.

Доказательство. Очевидно, что $|h_0|_p = 1$, так как $h_0 = 1$. В силу теоремы 2 решения h_1, h_2 могут существовать лишь только при $p > 5$. Более того, в силу свойства 1) пункта 2.1 имеем

$$|h_1|_p = \left| \sqrt{\frac{p^{4J} - 3 + \sqrt{p^{8J} - 6p^{4J} + 5}}{2}} \right|_p = \left| \sqrt{2\sqrt{5} - 6} \right|_p = 1.$$

Аналогично проверяется $|h_2|_p = 1$. \square

Лемма 5. *Для нормирующей константы Z_{n,h_i} , $i = 0, 1, 2$ верны следующие:*

- i) $|Z_{n,h_1}|_p = |Z_{n,h_2}|_p = p^{J(2^n-2)}$;
- ii) $|Z_{n,h_0}|_p = \begin{cases} p^{J(2^n-2)}, & \text{если } p \neq 3, \\ p^{(J-1)(2^n-2)}, & \text{если } p = 3. \end{cases}$

Доказательство. i) Из (3.8) для h_1 имеем

$$|a_{h_1}|_p = \left| \frac{((p^{4J}h_1^4 + 2h_1^2 + 1)(h_1^4 + 2h_1^2 + p^{4J}))^{\frac{1}{2}}}{p^J h_1^2} \right|_p =$$

$$\left| p^{-J} \sqrt{(2\sqrt{5} - 4)(\sqrt{5} + 1)} \right|_p = \left| p^{-J} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right|_p = p^J$$

Далее, так как $Z_{n,h} = a_h^{|V_{n-1}|}$ и $|V_{n-1}| = 2^n - 2$, то

$$|Z_{n,h_1}|_p = p^{J(2^n-2)}.$$

Аналогично проверяется $|Z_{n,h_2}|_p = p^{J(2^n-2)}$.

ii) Так как $h_0 = 1$, то из (3.8) получим

$$|a_{h_0}|_p = \left| \frac{((p^{4J} + 3)(3 + p^{4J}))^{\frac{1}{2}}}{p^J} \right|_p = |3p^{-J}|_p = \begin{cases} p^J, & \text{если } p \neq 3, \\ p^{J-1}, & \text{если } p = 3. \end{cases}$$

Отсюда,

$$|Z_{n,h_0}|_p = \begin{cases} p^{J(2^n-2)}, & \text{если } p \neq 3, \\ p^{(J-1)(2^n-2)}, & \text{если } p = 3. \end{cases}$$

\square

Теорема 4. *i) Если $p \neq 3$, то все трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса являются ограниченными.*

ii) Если $p = 3$, то существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая квазимера Гиббса μ_{h_0} . Причем она является неограниченной.

Доказательство. *i)* Пусть $p \neq 3$. В этом случае в силу леммы 5 мы имеем $|Z_{n,h_i}|_p = p^{J(2^n-2)}$, $i = 0, 1, 2$. В силу лемм 3,4 для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ и $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\left| \mu_{h_i}^{(n)}(\sigma) \right|_p = \left| \frac{p^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_i^{\sigma(x)}}{Z_{n,h_i}} \right|_p \leq \frac{p^{J(2^n-2)}}{p^{J(2^n-2)}} = 1, \quad i = 0, 1, 2.$$

Это означает, что в этом случае все трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса μ_{h_i} , $i = 0, 1, 2$ ограничены.

ii) Пусть $p = 3$. В этом случае в силу теоремы 2 существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая квазимера Гиббса μ_{h_0} . Покажем, что она неограничена. Определим конфигурацию σ следующим образом

$$\sigma(y)\sigma(z) = -1, \text{ при всех } x \in V_{n-1}, \quad S(x) = \{y, z\}$$

Тогда в силу лемм 4,5 для нормы меры μ_{h_0} в этой конфигурации имеем

$$\left| \mu_{h_0}^{(n)}(\sigma) \right|_p = \left| \frac{p^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_0}{Z_{n,h_0}} \right|_p = \frac{p^{J(2^n-2)}}{p^{(J-1)(2^n-2)}} = p^{2^n-2}.$$

Отсюда получим

$$\left| \mu_{h_0}^{(n)}(\sigma) \right|_p \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

□

3.1.2. Случай $J < 0$.

Лемма 6. $|p^{H_n(\sigma)}|_p \leq p^{-J(3 \cdot 2^n - 5)}$ для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ и $n \geq 1$.

Доказательство. Заметим, что Гамильтониан достигает своего минимума при конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$, которая принимает значение 1 при всех $x \in V_n$. □

Лемма 7. $|h_0|_p = 1$, $|h_1|_p = p^{-2J}$, $|h_2|_p = p^{2J}$.

Доказательство. Очевидно, что $|h_0|_p = 1$. Для нормы h_1 имеем

$$|h_1|_p = \left| p^{2J} \sqrt{\frac{1 - 3p^{-4J} + \sqrt{1 - 6p^{-4J} + 5p^{-4J}}}{2}} \right|_p = p^{-2J}.$$

Так как $h_i = \sqrt{u_i}$, $i = 1, 2$ и $u_1 \cdot u_2 = 1$, то $|h_2|_p = p^{2J}$. □

Лемма 8. Для нормирующей константы Z_{n,h_i} , $i = 0, 1, 2$ верны следующие

$$|Z_{n,h_i}|_p = p^{-J(5 \cdot 2^n - 10)}, \quad i = 1, 2 \quad |Z_{n,h_0}|_p = p^{-J(3 \cdot 2^n - 6)}.$$

Доказательство. В силу леммы 7 имеем $h_1 = p^{2J}\varepsilon$ где $|\varepsilon|_p = 1$. Следовательно,

$$|a_{h_1}|_p = \left| \frac{((p^{12J}\varepsilon^4 + 2p^{4J}\varepsilon^2 + 1)(p^{8J}\varepsilon^4 + 2p^{4J}\varepsilon^2 + p^{4J}))^{\frac{1}{2}}}{p^{5J}\varepsilon^2} \right|_p = p^{-5J}.$$

Отсюда,

$$|Z_{n,h_1}|_p = p^{-J(5 \cdot 2^n - 10)}.$$

Аналогично проверяются $|Z_{n,h_2}|_p = p^{-J(5 \cdot 2^n - 10)}$ и $|Z_{n,h_0}|_p = p^{-J(3 \cdot 2^n - 6)}$. \square

Теорема 5. *Все трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса ограничены.*

Доказательство следует из лемм 6,7,8.

4. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ p -АДИЧЕСКАЯ КВАЗИМЕРА ГИББСА

Будем исследовать следующее уравнение:

$$u = f(f(u)), \quad \text{где } f(u) = \frac{\theta^2 u^2 + 2u + 1}{u^2 + 2u + \theta^2} \quad (4.1)$$

Заметим, что множество решений уравнения (4.1) содержит решения уравнения $u = f(u)$. Но нас интересует только периодические (не являющиеся трансляционно-инвариантными) меры. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(u)) - u}{f(u) - u} = 0,$$

из которого получим:

$$\theta^2 u^2 + (\theta^2 + 1)u + \theta^2 = 0. \quad (4.2)$$

Если существует $\sqrt{1 + 2\theta^2 - 3\theta^4}$ в \mathbb{Q}_p , то

$$u_{3,4} = \frac{-1 - \theta^2 \pm \sqrt{1 + 2\theta^2 - 3\theta^4}}{2\theta^2}. \quad (4.3)$$

являются решениями уравнения (4.2). Обозначим $D(\theta) = 1 + 2\theta^2 - 3\theta^4$. Сначала мы должны проверить существование $\sqrt{D(\theta)}$ в \mathbb{Q}_p . Затем изучим существование чисел $\sqrt{u_3}$ и $\sqrt{u_4}$. Заметим, что из существования одного из них получаем существование второго. Действительно, предположим, что $\sqrt{u_3}$ существует в \mathbb{Q}_p . Тогда мы имеем

$$u_3 \cdot u_4 = \frac{(1 + \theta^2)^2 - (1 + 2\theta^2 - 3\theta^4)}{4\theta^4} = 1. \quad (4.4)$$

Так как $\sqrt{u_3} \in \mathbb{Q}_p$, то из (4.4) получим $\sqrt{u_4} \in \mathbb{Q}_p$.

Замечание 4. *Так как существование одного из чисел $\sqrt{u_3}$ и $\sqrt{u_4}$ влечет за собой существование другого, то мы заключаем, что либо не существует 2-периодическая p -адическая квазимера Гиббса, либо существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса.*

Обозначим через μ_1^{per} (соотв. μ_2^{per}) p -адическая квази мера Гиббса соответствующей вектору (h_3, h_4) (соотв. (h_4, h_3)).

4.1. **Случай** $J > 0$. В этом случае в силу Теоремы 1 существует $\sqrt{D(\theta)}$ для любого простого числа p . Теперь проверим существование $\sqrt{u_3}$ в \mathbb{Q}_p .

Пусть $p = 2$. Тогда имеем

$$u_3 = \frac{-1 - 2^{4J} + \sqrt{1 + 2^{4J+1} - 3 \cdot 2^{8J}}}{2^{4J+1}} = \frac{-1 - 2^{4J} + 1 + 2 + 2^2 + \dots}{2^{4J+1}} = 2^{-4J}(1 + 2 + \dots)$$

В силу Теоремы 1 следует, что $\sqrt{u_3}$ не существует в \mathbb{Q}_p .

Пусть $p \neq 2$. Тогда имеем

$$u_4 = \frac{-1 - p^{4J} - \sqrt{1 + 2p^{4J} - 3p^{8J}}}{2p^{4J}} = \frac{-1 - p^{4J} - 1 - p^{4J} - \dots}{2p^{4J}} = \frac{-1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{p^{4J}}.$$

Отсюда видно, что существование $\sqrt{u_3}$ эквивалентно существованию $\sqrt{-1}$. В силу Следствие 1 число $\sqrt{-1}$ существует в \mathbb{Q}_p тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$. Таким образом мы получили

Теорема 6. Если $p \equiv 1 \pmod{4}$, то для модели (2.2) существуют две 2-периодических p -адических квазимер Гиббса: μ_1^{per} и μ_2^{per} .

4.2. **Случай** $J < 0$. В этом случае $|\theta|_p > 1$. Тогда из $D(\theta) = \theta^4(-3 + 2\theta^{-2} + \theta^{-4})$ видно, что существования $\sqrt{D(\theta)}$ и $\sqrt{-3}$ эквивалентны. В таблице 1 при маленьких простых чисел p показаны условия, при которых существует $\sqrt{D(\theta)}$

p	2	3	5	7	11	13	17	19
$\sqrt{D(\theta)}$	—	—	—	+	—	+	—	—

Таблица 1.

Теорема 7. i) Если $p \in \{2, 3\}$, то не существует периодическая p -адическая квазимера Гиббса.

ii) Пусть $p > 3$. Если сравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ не разрешимо в \mathbb{Q}_p , то не существует периодическая p -адическая квазимера Гиббса.

iii) Пусть $p > 3$ и x_0 является решением сравнения $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса в том и только в том случае, если сравнение $x^2 - 2x_0 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо в \mathbb{Q}_p .

Доказательство. Так как существования $\sqrt{D(\theta)}$ и $\sqrt{-3}$ эквивалентны, то мы можем рассмотреть только случай, когда сравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо в \mathbb{Q}_p . Заметим, что $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}_p$ при $p \leq 3$.

Пусть $p > 3$ и x_0 является решением сравнения $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда

$$u_3 = \frac{-1 - p^{4J} + \sqrt{1 + 2p^{4J} - 3p^{8J}}}{2p^{4J}} = \frac{x_0 - 1 + p^{-4J}\varepsilon}{2}, \quad |\varepsilon|_p \leq 1$$

Отсюда из Теоремы 1 следует, что существование $\sqrt{u_3}$ эквивалентно разрешимости сравнения $x^2 - 2x_0 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$.

В силу замечания 4 существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса в том и только в том случае, если сравнение $x^2 - 2x_0 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо в \mathbb{Q}_p . \square

Благодарность. Автор благодарен У.А. Розикову и Ф.М.Мухамедову за полезные советы и ряд замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alberverio S., Karwowski W., *Stochastic Processes Appl.* **53** (1994), 1-22.
- [2] Bleher P.M., Ruiz J., Zagrebnov V.A. *Journ. Statist. Phys.* **79** (1995), 473-482.
- [3] Ганиходжаев Н.Н., Мухаммедов Ф.М., Розиков У.А., *Узб. Мат. Ж.*, No. 4, (1998), 23-29.
- [4] Georgii H.-O., *Gibbs Measures and Phase Transitions* (W. de Gruyter, Berlin, 1988).
- [5] Khrennikov A. Yu., *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- [6] Khakimov O.N., *p-Adic Numbers, Ultr.Anal.Appl.***5**:3 (2013), 194-203.
- [7] Koblitz N., *p-Adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions* (Springer, Berlin, 1977).
- [8] Marinari E., Parisi G., *Phys. Lett. B* **203**, (1988) 52-54.
- [9] Mukhamedov F.M., *Math.Phys.Anal.Geom*, **16** (2013), 49-87.
- [10] Mukhamedov F.M., *p-Adic Numbers, Ultr.Anal.Appl.*, **2** (2010), 241-251.
- [11] Розиков У.А., Хакимов О.Н., *ТМФ.* **175**:1 (2013), 84-92.
- [12] Rozikov U.A., *Gibbs Measures on Cayley Trees.* *World Sci. Publ. Singapore.* 2013, 404 pp.
- [13] Schikhof W.H., *Ultrametric Calculus* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
- [14] Vladimirov V.S., Volovich I. V., Zelenov E. V., *p-Adic Analysis and Mathematical Physics* (World Sci., Singapore, 1994).
- [15] Yasuda K., *Osaka J. Math.* **37**, (2000), 967-985.

О. Н. ХАКИМОВ, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, УЛ. ДУРМОН ЙУЛИ, 29, ТАШКЕНТ, 100125, УЗБЕКИСТАН.

E-mail address: hakimovo@mail.ru